Lycée A. Daudet
Laboratoire de mathématiques J.P. Serre Année 2003-2004

Quelques petits problèmes

1 Vous disposez de jetons numérotés entre 1 et 1000 et vous avez autant de jetons que vous voulez avec un numéro donné. Vous pouvez prendre tous les jetons que vous voulez pourvu que leur somme soit égale à 1000. Vous gagnez alors un chèque d'un montant égal au produit de tous les nombres inscrits sur les jetons choisis. Saurez-vous être riche ?!

2 Monsieur et Madame Dupont ont récemment organisé une soirée au cours de laquelle ils avaient invité trois autres couples. Un certain nombre de poignées de mains ont été échangées mais personne n'a serré la main de son conjoint, personne n'a serré deux fois la main à la même personne et bien sûr personne ne s'est serré sa propre main ! Après ces échanges de saluts, Monsieur Dupont demande à chaque personne présente, le nombre de poignées de main qu'elle a donné. A sa grande surprise, tout le monde donne une réponse différente. Quel est le nombre de personnes à qui Madame Dupont a serré la main ?

3 A chaque instant, sur la planète, il y a deux sortes de gens, ceux qui depuis leur naissance ont donné un nombre impair de poignées de main et les autres ! Que peut-on dire du nombre de gens appartenant à la première catégorie ?

4 Montrer que dans une réception, réunissant n personnes, deux d'entre elles au moins connaissent exactement le même nombre de personnes parmi les présents.

5 De combien de manières peut-on rendre la monnaie de n euros en pièces de 1 et 2 euros ? Et si on ajoute des billets de 5 euros ?

6 Sur un quadrillage plan (les carreaux sont carrés), choisissez 5 points définis par le quadrillage. Que constatez-vous sur les segments définis par ces points ? Pourquoi a-t-on cette propriété ? Combien de points faut-il prendre pour observer le même phénomène dans l'espace ?

7 Soit A un ensemble de $2n$ points dans le plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés. Supposons que n d'entre eux soient colorés en rouge et le reste en bleu. Prouver ou infirmer : il existe n segments, deux à deux disjoints tels que leurs extrémités soient des points de A de couleurs différentes.

8 Étant donnés un nombre fini de points du plan, pas tous alignés, existe-t-il une droite qui passe par exactement deux de ces points ?

9 Les adorateurs du nombre 3 vénère le nombre $333\cdots333$ composé du chiffre 3 en 111 exemplaires. La raison qu'ils invoquent est que la somme des chiffres de son carré est égale à trois fois la somme des chiffres du nombre. Ont-ils raison ? Ce nombre est-il si extraordinaire ?

10 Une voie de chemin de fer est absolument rectiligne et plate pendant cinq kilomètres (la courbure de la Terre a été aplanie). Supposons que les deux extrémités restant fixées, on intercale un rail d'un mètre de long au milieu, de manière à ce qu'il s'intègre au reste sans soudure. Supposons, de plus, que, en se déformant, la voie prenne la forme d'un arc de cercle. Soit alors x la distance entre le milieu de l'arc et le sol. Avant tout calcul, quel est l'ordre de grandeur vraisemblable de x (centimètre, mètre, dizaine(s) de mètres) ? Vérifier votre intuition en calculant x.

11 Après avoir ramassé une certaine quantité de noix de coco, cinq marins sur une île déserte décident d'attendre le lendemain pour diviser le tas en parts égales. Pendant la nuit l'un des marins se lève, partage les noix de coco en cinq tas égaux avec un reste d'une noix qu'il jette à un singe qui passait opportunément par là, et après avoir caché sa part, rassemble les tas restants et retourne se coucher. Le second marin fait de même un peu plus tard dans la nuit, ainsi que le troisième, le quatrième et le cinquième. Le matin, le nombre de noix de coco restantes, moins une est encore divisible par 5. Quel est le nombre minimum de noix de coco que pouvait contenir le tas initial ?

12 A quelle distance est l'horizon ?

13 Les concombres, comme chacun sait, sont composés à 99% d'eau. On laisse reposer 500 kilos de concombres pendant une nuit, et le lendemain, les concombres ne contiennent plus que 98% d'eau. Quel est le poids des concombres au matin ?

14 Si tous les points du plan sont colorés d'une couleur parmi trois, y a-t-il obligatoirement deux points de même couleur à exactement un centimètre de distance ?

15 On considère un quadrillage 10×10 par 100 carrés d'un centimètre de côté ; d'autre part on a des dominos rectangulaires de 2 centimètres sur 1. Peut-on recouvrir ce quadrillage, auquel on aurait ôté les deux coins, supérieur droit et inférieur gauche, par de tels dominos ?

16 On place un cavalier sur chaque case d'un échiquier 7×7. Est-il possible qu'ils puissent effectuer simultanément un mouvement autorisé ?