

Les cinq polyèdres platoniciens

R. Brouzet

15 juin 2004

1 Activité préparatoire : un peu de géométrie plane

1 Somme des angles d'un triangle

La somme des angles d'un triangle vaut un angle plat c'est-à-dire a une mesure de 180 degrés ou π radians. Redémontrer cette propriété connue depuis le collège. Quelle propriété fondamentale de la géométrie euclidienne utilise-t-on ?

2 Somme des angles d'un polygone convexe

Un polygone est une ligne polygonale fermée (ligne brisée). Chaque segment composant la ligne polygonale est appelé un *côté* et chacune de leurs extrémités un *sommet*. Un polygone est dit *convexe* si pour chacun de ses côtés c , le polygone est entièrement contenu dans l'un des deux demi-plans délimités par la droite définie par le côté c . Un polygone convexe est dit *régulier* si tous ses côtés ont la même longueur et tous ses angles ont la même mesure.

a) Dessiner quelques polygones, des convexes et des non-convexes.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, il existe un polygone régulier ayant n côtés.

c) Etablir pour un polygone convexe une formule donnant la somme de tous ses angles aux sommets en fonction du nombre de sommets (utiliser l'exercice précédent).

2 Un peu de géométrie sphérique

3 La sphère

Soit S une sphère de l'espace euclidien de dimension 3 c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace, équidistants d'un point fixe O appelé le centre de la sphère. La distance commune entre le point O et un point quelconque de S est appelé le *rayon* R de la sphère. Un *grand cercle* de la sphère est l'intersection

d'un plan passant par son centre O avec la sphère ; si un plan coupe la sphère mais ne passe pas par O son intersection est appelé un *petit cercle*.

a) Si on assimile la surface de la Terre à une sphère, donner des exemples de grands cercles et de petits cercles remarquables.

b) Montrer que par deux points distincts de la sphère S il passe un grand cercle et que celui-ci est unique pourvu que les deux points ne soient pas diamétralement opposés. Quelle propriété de géométrie plane évoque cette propriété de géométrie sphérique ?

c) Quelle propriété fondamentale de la géométrie plane n'est en revanche pas respectée par les grands cercles de la sphère si on suit l'analogie dégagée dans la question précédente ?

On appelle *polygone sphérique* une ligne fermée formée d'arcs de grands cercles (ou indifféremment la portion de la sphère délimitée par cette ligne) ; en particulier, un *triangle sphérique* est formé de trois arcs de grands cercles. Enfin deux grands cercles distincts se coupent en deux points diamétralement opposés A et A' (pourquoi ?) ; ils divisent la sphère en quatre régions appelées *fuseaux*.

d) Définir ce qu'on peut appeler *angles* d'un triangle sphérique ou d'un fuseau.

e) Dessiner des triangles sphériques et des fuseaux. Que rappelle ce dernier mot ?

4 La formule de Girard

a) Rappeler la formule donnant l'aire d'une sphère de rayon R .

b) En déduire l'aire d'un fuseau en fonction de son angle.

c) Si T est un triangle sphérique d'angles α, β et γ , montrer que son aire est donnée par :

$$\text{Aire}(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

(indication : si D est la demi-sphère contenant T et déterminée par le grand cercle opposé à l'angle α , découper D en quatre régions dont l'une est T .)

d) Commentaires.

3 Polyèdres : la formule d'Euler

Un polyèdre est l'analogie tridimensionnel d'un polygone... Si on a un nombre fini de points A_1, \dots, A_n qui ne sont pas tous situés dans un même plan, on peut définir le *polyèdre convexe de sommets* A_1, \dots, A_n comme étant le plus petit ensemble convexe contenant ces points. Un tel polyèdre est limité par des *faces*, lesquelles sont limitées par des *arêtes*, elles-mêmes limitées par les *sommets*. Nous nous en tiendrons à cette idée intuitive car il n'est pas très aisé de définir rigoureusement tout cela...

5 Exemples de polyèdres convexes

Donner des exemples de polyèdres convexes et les dessiner.

6 La formule d'Euler

a) Montrer que pour tout polyèdre convexe, les nombres S de sommets, A d'arêtes et F de faces vérifient la relation

$$S - A + F = 2$$

(indication : “gonfler” le polyèdre pour obtenir une sphère et calculer de deux manières différentes la somme de tous les angles de tous les polygones sphériques obtenus...)

b) Contempler le résultat !

c) Montrer que la convexité est essentielle en trouvant un polyèdre non convexe (on n'en a pas donné de définition mais on peut se laisser guider par l'intuition) pour lesquels les nombres S , A et F ne satisfont pas cette relation.

4 Polyèdres réguliers : les polyèdres platoniciens

Nous dirons qu'un polyèdre convexe est *régulier* si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques et s'assemblent de la même façon en chaque sommet au sens où les figures constituées par les arêtes aboutissant à un sommet sont les mêmes en chaque sommet. En particulier, les faces ont le même nombre s de sommets et à chaque sommet du polyèdre aboutit le même nombre r d'arêtes. On a bien sûr $r \geq 3$ et $s \geq 3$.

7 Soit P un tel polygone régulier. On conserve les notations précédemment introduites.

a) Etablir une relation entre les nombres s, F, A puis entre les nombres r, S, A .

b) En déduire grâce à la formule d'Euler que les nombres r et s sont inférieurs ou égaux à 5.

c) En déduire quels sont les couples (r, s) a priori possibles et récapituler dans un tableau les valeurs r, s, S, A, F correspondantes, ainsi que la nature géométrique des faces.

d) Réaliser concrètement (patrons ou jeu de construction) des polyèdres satisfaisant ces valeurs ; on les appelle les *polyèdres platoniciens* ou *solides platoniciens*. Ils sont au nombre de cinq et nommés *tétraèdre*, *hexaèdre* (ou plus communément *cube*), *octaèdre*, *dodécaèdre* et *icosaèdre*.

e) Montrer qu'on peut associer de manière assez naturelle ces polyèdres platoniciens deux par deux, le cinquième étant alors associé avec lui-même !

Références :

M. Audin, *Géométrie*, Belin.