Les lois de Kepler

Robert Brouzet[*], **Gabriela Skulova**[†]

15 juin 2004

 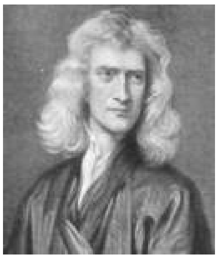

FIG. 1 – Kepler et Newton

« Il fallait être Newton pour apercevoir que la Lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas. »

(Paul Valéry).

Table des matières

[*]Maître de conférences au Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Nîmes.

[†]Élève en Terminale S au Lycée A. Daudet de Nîmes.

1 Introduction

FIG. 2 – Tycho Brahé

Le but de ce texte est d'expliquer, en restant le plus possible au niveau d'une terminale S, comment, à partir des trois lois régissant les orbites des planètes du système solaire, que Kepler découvrit grâce à son patient génie et aux innombrables observations qu'il tenait de Tycho Brahé, Isaac Newton put édifier sa loi de la gravitation universelle et, inversement, comment partant de cette loi de la gravitation universelle de Newton, on peut retrouver les lois de Kepler. Nous commençons par un petit survol sur les coniques, nécessaire à la compréhension du texte.

2 Coniques

2.1 Bref aperçu historique

Les *coniques* apparaissent semble-t-il pour la première fois au IV-ième siècle av. J.C. dans les travaux de Menechme, élève de Platon, relatifs à la duplication du cube. Leur nom est dû à l'abréviation de *sections coniques* que leur donna Apollonius de Perge, qui écrivit au III-ième siècle av J.C. le premier grand ouvrage à leur sujet, en les définissant comme des sections planes d'un cône à base circulaire. Leur définition par foyer et directrice date du III-ième siècle (Pappus), leur approche algébrique sous forme d'équations cartésiennes est due à R. Descartes. Les trois types de coniques sont la *parabole*, l'*ellipse* et l'*hyperbole*, noms dont les étymologies grecques signifient respectivement *comparaison*, *excés* et *défaut* et sont liées à un problème de construction de rectangles d'aires égales à celle d'un carré (cf. [Gr]).

2.2 Définition par foyer et directrice

Pour cette partie on pourra consulter par exemple [Gr] ou [Sa].

Soient F un point fixé du plan et $\mathcal{D}$ une droite fixée du plan, ne contenant pas F. Soit d'autre part un réel $e > 0$ fixé. On appelle *conique* de *foyer* F, de *directrice* $\mathcal{D}$ et d'*excentricité* e, l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$MF = eMH$$

où H est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$ (autrement dit, MH n'est autre que la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$).

2.3 Équation cartésienne d'une conique

Soit $\mathcal{C}$ est une conique de *foyer* F, de *directrice* $\mathcal{D}$ et d'*excentricité* e ; notons K la projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$ et $d = FK$. Considérons le repère orthonormé direct $(F, \vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{FK}, \vec{j})$. Dire qu'un point M de coordonnées (x, y) dans ce repère, appartient à la conique $\mathcal{C}$, équivaut à dire que

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

ou encore

$$(1 - e^2)x^2 + 2epx + y^2 = p^2 \tag{1}$$

en posant $p = ed$, nombre appelé *paramètre* de la conique. A la vue de cette équation, il est clair qu'il faut distinguer deux cas selon que $e = 1$ ou $e \neq 1$ (ce second cas étant lui-même scindé dans les deux sous-cas $e < 1$ et $e > 1$).

2.3.1 Le cas $e = 1$

Dans ce cas, l'équation (1) s'écrit $x - \frac{p}{2} = -\frac{y^2}{2p}$ que l'on reconnaît comme étant l'équation d'une *parabole*, de *sommet* S le point de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ et d'axe Ox ; la directrice est la droite d'équation $x = p$.

2.3.2 Le cas $e < 1$

Dans ce cas, l'équation (1) s'écrit, en divisant membre à membre par le réel $1 - e^2 > 0$ et en complétant le début du développement d'un carré,

$$\left(x + \frac{ep}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{p^2}{1 - e^2} - \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Faisant alors une translation du repère conduisant aux nouvelles coordonnées

$$X = x + \frac{ep}{1 - e^2}, \ Y = y,$$

on obtient l'équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

où $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = a\sqrt{1 - e^2}$. La courbe obtenue est l'image du cercle d'équation $X^2 + Y^2 = a^2$ par l'affinité du plan $(X, Y) \mapsto (X, \frac{b}{a}Y)$; on appelle cette courbe une *ellipse*. Les *éléments caractéristiques* de cette courbe sont outre son paramètre p et son excentricité e, son *demi grand axe* $a = \frac{p}{1-e^2}$ et son *demi petit axe* $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Comparant, les expressions de a et b, en fonction de e et p, on obtient aussi immédiatement la relation $b = \sqrt{ap}$. Dans les nouvelles coordonnées, l'origine O est le centre de l'ellipse et le foyer F a pour coordonnées $(\frac{ep}{1-e^2}, 0)$. Notons F' le symétrique de F par rapport à O ; F' a pour coordonnées $(-\frac{ep}{1-e^2}, 0)$. On peut alors montrer (exercice) que

$$MF + MF' = 2a,$$

propriété qui peut être exploitée pour servir d'autre définition (dite alors *bifocale*) de l'ellipse et à une méthode pratique simple pour la tracer, la méthode dite du *jardinier*.

2.3.3 Le cas $e > 1$

Dans ce cas, l'équation (1) s'écrit, en divisant membre à membre par le réel $1 - e^2 < 0$ et en complétant le début du développement d'un carré,

$$\left(x - \frac{ep}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{p^2}{1 - e^2} - \frac{e^2 p^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Faisant alors une translation du repère conduisant aux nouvelles coordonnées

$$X = x - \frac{ep}{e^2 - 1},\ Y = y,$$

on obtient l'équation

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

où $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. Cette équation s'écrit encore

$$\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right) = 1$$

dans laquelle on reconnaît l'équation d'une *hyperbole* d'asymptotes les droites d'équation

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0,\ \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0.$$

2.4 Équation polaire d'une conique

Tout point du plan, de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal, s'écrit d'une infinité de façons sous la forme

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

Un couple (r, θ) qui vérifie les égalités précédentes est appelé un *système de coordonnées polaires* du point M de coordonnées cartésiennes (x, y). A noter que si (r, θ) convient, alors $(-r, \theta + \pi)$ convient aussi.

Si on revient à la définition d'une conique par foyer et directrice, on obtient que le point M de coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère orthonormal considéré vérifie $\sqrt{x^2+y^2} = e|d-x|$. On a alors pour (r,θ) coordonnées polaires de M, $|r| = |ed - er\cos\theta|$ ce qui conduit à

$$r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$$

ou

$$r = \frac{-ed}{1-e\cos\theta} \text{ i.e. } -r = \frac{ed}{1+e\cos(\theta+\pi)}$$

et donc quitte à changer (r,θ) en $(-r,\theta+\pi)$, on voit qu'une conique a une équation polaire du type

$$r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}.$$

3 De Kepler à Newton

3.1 Les lois de Kepler

Kepler énonça, après bien des calculs effectués à partir des observations de Tycho Brahé et en particulier de l'observation de la planète Mars, les trois lois suivantes :

Fig. 3 – Kepler

Première loi : *Les planètes décrivent autour du Soleil des ellipses (en particulier ont des trajectoires planes) dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

Deuxième loi : *Les aires balayées par le rayon joignant le Soleil à la planète sont proportionnelles au temps i.e. des aires balayées pendant des intervalles de temps égaux sont égales.*

Cela a pour conséquence en particulier que les planètes vont plus vite lorsqu'elles sont plus près du Soleil (vitesse maximale au *périhélie*).

Troisième loi : *Si T est la période d'une planète (c'est-à-dire le temps qu'elle met pour faire le tour du Soleil) et a le demi-grand axe de son orbite alors le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes.*

Cette loi est de nature différente des deux premières puisqu'elle met en relation toutes les planètes ; elle est de nature globale.

3.2 Mouvement à force centrale

Un point P est dit soumis à une *force centrale* s'il s'applique sur P une seule force dont la direction passe à chaque instant par un point fixe S d'un repère galiléen.

Notons dans ce cas $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$, le *rayon vecteur*, joignant le point fixe S au point mobile P. Notons également $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse du point P et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ son accélération.

On définit aussi le moment cinétique du point P par rapport à S comme étant le vecteur

$$\vec{L} := \vec{r} \wedge m\vec{v}.$$

Rappelons enfin que la loi fondamentale de la dynamique de Newton pose que

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

où $\vec{f}$ représente la somme de toutes les forces qui s'appliquent sur le point P.

Proposition 3.1 *Si P est soumis à une force centrale alors le vecteur $\vec{L}$ est constant le long du mouvement i.e. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$.*

En effet, $\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a}) = m\vec{r} \wedge \vec{a}$. Si donc P est soumis à une force centrale (de centre S), la force, donc l'accélération, est à tout instant colinéaire à $\vec{r}$ et donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ i.e. le vecteur $\vec{L}$ est constant le long du mouvement.

Il résulte en particulier de cette proposition que le mouvement de P est plan (i.e. que P se déplace dans un plan). En effet, si $\vec{L} = \vec{0}$, $\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à chaque instant donc le mouvement est rectiligne et si $\vec{L} \neq \vec{0}$ le mouvement est situé dans le plan orthogonal au vecteur $\vec{L}$. Dans la suite, on écartera le cas trivial du mouvement rectiligne où $\vec{L} = \vec{0}$.

Si on choisit alors un repère orthonormal $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{k}$ est orthogonal au plan du mouvement, le vecteur $\vec{L}$ est alors colinéaire à $\vec{k}$ et on voit aisément en écrivant $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ et en dérivant, que sa composante suivant $\vec{k}$ est égale à $mr^2\frac{d\theta}{dt} = mr^2\dot{\theta}$ où θ est l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{r}$. On peut se convaincre que la quantité $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ est l'aire balayée par le rayon vecteur pendant l'instant dt. On appelle alors *vitesse aréolaire* la quantité

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}.$$

Le fait que $\vec{L}$ soit constant le long du mouvement dans le cas d'un mouvement à force centrale implique donc, non seulement que le mouvement est plan, mais encore que la vitesse aréolaire est constante.

Inversement, si le mouvement de P est plan et que sa vitesse aréolaire est constante, le vecteur $\vec{L}$ sera donc constant et donc $\vec{a}$ sera colinéaire à chaque instant à $\vec{r}$ donc le mouvement sera central. On peut résumer ce que nous venons de prouver par le

Théorème 3.2 *Le mouvement de P est central si, et seulement s'il est plan de vitesse aréolaire constante.*

3.3 La chute de la Lune ou la loi en $1/r^2$

Suivant le principe d'inertie, si aucune force ne s'appliquait sur elle, la Lune ou une planète quelconque, ayant une certaine vitesse à un instant donné, devrait continuer, indéfiniment en ligne droite à vitesse constante. S'il n'en est rien, c'est que s'exerce sur elle une force. Les deux premières lois de Kepler nous indique compte tenu du résultat précédent que cette force est centrale, et même centripète puisque les trajectoires s'incurvent vers le foyer attracteur. On connaît donc la direction et le sens de cette force, il manque son intensité. Newton a l'idée géniale de penser que cette force d'attraction de la Lune vers la Terre ou d'une planète quelconque vers le Soleil est rigoureusement de même nature que celle qui attire la pomme vers le sol (en fait vers le centre de la Terre). Or, depuis Galilée, on connaît bien la loi de la chute des corps sur la Terre. Newton va donc se servir de ces résultats et des lois de Kepler pour calculer comment la Lune tombe sur la Terre !

Soit P la position de la planète sur son orbite elliptique à un instant initial $t = 0$ et Q sa position à un instant très voisin t. En l'absence de force attractive la planète aurait dû filer tout droit le long de la tangente à l'ellipse en P ; par suite de cette attraction elle a quitté cette tangente et est “tombée” sur le foyer S. Sa hauteur de chute est mesurée par la distance PR où R est l'intersection de la parallèle à la tangente en P avec le rayon (SP). D'après les lois de Galilée sur la chute des corps, cette hauteur est d'autre part donnée par la formule $PR = \frac{1}{2}gt^2$ où g est l'accélération de la pesanteur communiquée à P par S et qu'il s'agit précisément de déterminer. Maintenant, la deuxième loi de Kepler nous dit que la vitesse aréolaire est constante. Or, l'aire balayée par le rayon $\overrightarrow{SP}$ pendant toute la révolution est πab (aire de l'ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b) et l'aire balayée pendant le court instant t est approximativement celle du triangle PSQ, soit $\frac{SP \times QH}{2}$ où H est le pied de la hauteur issue de Q donc,

$$\pi abT \simeq \frac{SP \times QH}{2t},$$

l'égalité n'ayant lieu en fait que pour le cas où t tend vers 0. On en déduit que

$$t^2 \simeq \frac{SP^2 \times QH^2}{4\pi^2 a^2 b^2} T^2$$

qui nous donne donc

$$PR \simeq \frac{SP^2 \times QH^2}{8\pi^2 a^2 b^2} gT^2.$$

Maintenant, la troisième loi de Kepler nous dit que $T^2 = ca^3$ où c est une constante donc

$$\frac{PR}{QH^2} \simeq kSP^2 \frac{a}{b^2} g$$

où k est une constante. Or,

Lemme 3.3 *Lorsque le point Q tend vers le point P (c'est-à-dire t tend vers 0), le rapport $\frac{PR}{QH^2}$ tend vers $\frac{a}{2b^2}$.*

Il en résulte donc en passant à la limite que $\frac{a}{b^2} = kSP^2 \frac{a}{b^2} g$ i.e. en posant $k' = 1/k$,

$$g = \frac{k'}{SP^2}$$

ce qui montre que l'accélération cherchée, et donc la force qui en est responsable, varie inversement proportionnellement au carré de la distance.

Si cela l'amuse, le lecteur pourra essayer de prouver le lemme géométrique cidessus. Dans le cas où l'on suppose l'orbite circulaire, ce qui n'est pas très loin de la réalité, ce calcul de limite est très simple. En effet, dans ce cas le point S est au centre du cercle et les points R et H coïncident car la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon. D'autre part, si on note par P' le point diamétralement opposé du point P, on sait par un théorème connu sous le nom de théorème de Thalès (pas celui sur les rapports de longueurs) que le triangle PQP' est rectangle en Q. Par un corollaire du théorème de Pythagore, on a alors $QH^2 = PR(2a - PR)$ où a est le rayon du cercle, et donc clairement $\frac{PR}{QH^2} = \frac{1}{2a - PR}$ tend vers $\frac{1}{2a} = \frac{a}{2b^2}$ (ici $a = b$) quand Q tend vers P.

4 De Newton à Kepler, le problème des deux corps

4.1 Le problème simplifié

La loi de l'attraction universelle c'est dire que “tout le monde attire tout le monde”, radialement, proportionnellement aux masses et inversement proportionnellement au carré de la distance, donc dans le cas du Soleil et d'une planète, de la Terre et de la Lune, de la Terre et d'un satellite artificiel, le gros objet attire le petit mais le petit attire aussi le gros ! Pour simplifier nous allons faire comme si le gros objet, étant tellement plus lourd que le petit ne subissait pas cette petite attraction perturbatrice donc n'était pas accéléré. Cela nous permet de considérer que le gros objet, soit S, est un point, origine d'un référentiel galiléen et que le petit P est soumis à une *force centripète* (centrale et attractive) du type, $\vec{f} = -k\frac{\vec{r}}{r^3}$ où $\vec{r}$ désigne le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ et r sa norme euclidienne et donc a, d'après la loi fondamentale de la dynamique de Newton, une accélération $\vec{a} = -\frac{k}{m}\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Comme cela a déjà été étudié auparavant, puisque la force est centrale, le vecteur $\vec{L}$ est constant le long du mouvement et donc la trajectoire est plane, située dans le plan orthogonal au vecteur $\vec{L}$. Posons

$$H = \frac{1}{2}f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$$

appelée *énergie mécanique* du point P.

Proposition 4.1 *H est une quantité conservée le long du mouvement i.e.* $\frac{dH}{dt} = 0$. *Il en est donc aussi ainsi de f appelée constante des forces vives.*

En effet, $\dot{H} = \frac{dH}{dt} = mv\dot{v} + k\frac{\dot{r}}{r^2}$. Tout consiste donc à savoir calculer des quantités telles que $\dot{r}$ ou $\dot{v}$. De manière générale, on a le résultat suivant :

Lemme 4.2 *Si $\vec{u}$ est un vecteur et u sa norme euclidienne $u := \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$, alors $\dot{u} = \frac{\vec{u}.\frac{d\vec{u}}{dt}}{u}$.*

Ainsi,

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = mv\frac{\vec{v}.\vec{a}}{v} + k\frac{\vec{r}.\vec{v}}{r^3}$$

qui est nul compte tenu de l'expression de $\vec{a}$.

Posons maintenant

$$\vec{E} := \vec{L} \wedge \vec{v} + k\frac{\vec{r}}{r}$$

appelé *vecteur de Laplace.*

Proposition 4.3 *Le vecteur de Laplace $\vec{E}$ est constant le long du mouvement (i.e. $\frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{0}$) et orthogonal à $\vec{L}$.*

En effet,

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{L} \wedge \vec{a} + k\frac{\vec{v}}{r} - k\frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} = \vec{L} \wedge \vec{a} + k\frac{\vec{v}}{r} - k\frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2}$$

puisque $\vec{L}$ est constant le long du mouvement. On a donc par la formule du double produit vectoriel

$$\frac{d\vec{E}}{dt} = k\left(\frac{1}{r^3}((\vec{r}.\vec{v})\vec{r} - r^2\vec{v})) + \frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{r}.\vec{v})\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{0}.$$

Enfin, $\vec{E}$ est clairement orthogonal à $\vec{L}$ car $\vec{L} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{L}$ et $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{r}$.

Ainsi, le vecteur $\vec{E}$ est un vecteur fixe situé dans le plan du mouvement. Notons ϕ l'angle entre $\vec{E}$ et le rayon vecteur $\vec{r}$; alors $\vec{E}.\vec{r} = Er\cos\phi$. D'autre part, par définition du vecteur $\vec{E}$, on a

$$\vec{E} = \vec{L} \wedge \vec{v} + k\frac{\vec{r}}{r} = m\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{r}) + k\frac{\vec{r}}{r}$$

d'où par la formule du double produit vectoriel

$$\vec{E} = m(\vec{v}.\vec{r})\vec{v} - mv^2\vec{r} + k\frac{\vec{r}}{r}$$

ce qui donne

$$\vec{E}.\vec{r} = m(\vec{v}.\vec{r})^2 - mr^2v^2 + kr = -\frac{L^2}{m} + kr.$$

On déduit de cela que

$$r = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 - \frac{E}{k}\cos\phi}$$

qui est une équation polaire de la conique de grand axe dirigé par $\vec{E}$, d'excentricité $e = \frac{E}{k}$ et de paramètre $p = \frac{L^2}{mk}$ (avec les notations de 2.4, on a ici $\theta = \phi + \pi$).

Le type de la conique est donné en comparant e par rapport à 1. Pour cela remarquons que

Proposition 4.4 $E^2 = k^2 + f\frac{L^2}{m}$

En effet, par définition de $\vec{E}$ et compte tenu de la formule du double produit vectoriel, on a

$$\vec{E} = m(\vec{v}.\vec{r})\vec{v} + \left(\frac{k}{r} - mv^2\right)\vec{r}$$

donc

$$E^2 = m^2(\vec{v}.\vec{r})^2v^2 + \left(\frac{k}{r} - mv^2\right)^2 r^2 + 2m\left(\frac{k}{r} - mv^2\right)(\vec{v}.\vec{r})^2$$

ce qui donne en développant, simplifiant, regroupant les termes et se souvenant que $f = mv^2 - \frac{2k}{r}$,

$$E^2 = k^2 + mf\left(v^2r^2 - (\vec{c}.\vec{r})^2\right)$$

c'est-à-dire la formule annoncée en utilisant que $\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ et que pour des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ quelconques on a

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

Il résulte de cette proposition que l'excentricité $e = \frac{E}{k}$ de la conique vérifie

$$e^2 = 1 + \frac{fL^2}{mk^2}$$

et donc que :

i) si $f < 0$, la trajectoire relative de P par rapport à S est une ellipse,

ii) si $f = 0$, la trajectoire relative de P par rapport à S est une parabole,

iii) si $f < 0$, la trajectoire relative de P par rapport à S est une hyperbole (en fait une branche d'hyperbole).

Plaçons nous dans le cas d'une orbite elliptique (cas d'une planète par exemple). Il reste à retrouver la troisième loi de Kepler ; puisque la vitesse aréolaire est constante, cette vitesse est égale à chaque instant, si T est la période de révolution de la planète P, à $\mathcal{A} = \frac{L}{2m} = \frac{\pi ab}{T}$. Or on a vu que pour une ellipse, $b = \sqrt{ap}$ d'où ici

$$\mathcal{A} = \frac{L}{2m} = \frac{\pi a^{3/2}\sqrt{p}}{T} = \frac{\pi a^{3/2}L}{\sqrt{mk}T}$$

ce qui donne en simplifiant

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}.$$

Or $k = \mathcal{G}mM$ donc cette formule montre bien que le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est constant et égal à $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}$.

4.2 Le problème complet

On s'intéresse maintenant à un système de deux corps supposés ponctuels S et P (dans l'optique essentiellement Soleil-Planète), de masses respectives M et m, s'attirant mutuellement selon une *force centripète* (centrale et attractive), proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux corps donc du type

$$\vec{f} = \pm \mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Précisons que si $\vec{r}$ désigne une fois de plus le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$, alors S exerce sur P la force $\vec{f} = -\mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}$, tandis que P exerce sur S la force opposée $\vec{f} = \mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}$.

On se propose décrire le mouvement de P relativement à un repère lié à S, c'est à dire de décrire comment varie le rayon vecteur $\vec{r}$. Considérons un référentiel galiléen et O l'origine d'un repère orthonormal lié à ce référentiel. D'après la loi fondamentale de la dynamique appliqué au corps P qui subit la force extérieure exercée par S, on a

$$m\vec{a}\vec{f} = -\mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

mais la différence avec le paragraphe précédent est qu'on ne peut pas remplacer l'accélération $\vec{a}$ dans cette formule par $\frac{d\vec{v}}{dt}$ où $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, c'est à dire par la dérivée seconde de $\vec{r}$, car l'accélération de P dans le référentiel galiléen considéré est donné par $\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}$ qui ne coïncide pas avec $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ car par la relation de Chasles

$$\vec{r} = \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}$$

et donc

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} - \frac{d^2\overrightarrow{OS}}{dt^2}$$

le dernier terme n'étant pas nul puisque le corps S subit lui aussi une accélération par rapport au référentiel galiléen considéré, celle que lui communique la force exercée par P sur S ! Ainsi, on a en fait

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = -\mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ et } M\frac{d^2\overrightarrow{OS}}{dt^2} = \mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

d'où par différence

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mathcal{G} M \frac{\vec{r}}{r^3} - \mathcal{G} m \frac{\vec{r}}{r^3} = \mathcal{G}(M+m)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

ou encore

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f} = -\mathcal{G} m M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

en posant

$$\mu = \frac{mM}{m+M}.$$

Autrement dit, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit en fait comme dans le cas simplifiée ou nous supposions qu'il n'y avait pas d'influence de P sur S, en remplaçant seulement $m\vec{a}$ par $\mu\vec{a}$.

Ainsi, ce qui précède s'applique et montre que la trajectoire de P relativement à S est une conique d'excentricité et de paramètre donnés par les formules

$$p = \frac{L^2}{\mu k}, \; e = \frac{E}{k}.$$

Le type de la conique est d'après l'étude du problème simplifié, donné par le signe de la constante des forces vives f, qui vaut ici

$$f = \mu v^2 - \frac{2k}{r}.$$

Puisque $k = \mathcal{G}mM$ et $\mu = \frac{mM}{m+M}$, le type de la conique est donc donné par le signe de la quantité

$$v^2 - \frac{2\mathcal{G}(M+m)}{r}.$$

En particulier, on a aussi dans le cas d'une trajectoire elliptique,

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{k} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(M+m)}$$

rapport du carré de la période au cube du demi-grand axe qui dépend donc de la masse de la planète P et donc n'est pas le même pour toutes les planètes. Ceci montre que la troisième loi de Kepler n'est qu'approximative, approximation tout de même excellente compte tenu du fait que la masse m est très petite relativement à la masse M dans le cas des planètes du système solaire.

4.3 Application

Ce qui détermine le genre de la conique est, comme nous l'avons vu, le signe de la constante des forces vives

$$f = \mu v^2 - \frac{2k}{r}.$$

Ce signe est aussi, compte tenu des valeurs de $k = \mathcal{G}mM$ et de $\mu = \frac{mM}{m+M}$, celui de

$$v^2 - \frac{2\mathcal{G}(M+m)}{r}.$$

Si r_0 est la distance entre S et P à un instant donné et v_0 la vitesse de P relativement à S à cet instant là, la valeur critique de v_0 à partir de laquelle la trajectoire s'échappera à l'infini est donc celle qui correspond au cas parabolique où on a

$$v_0^2 = \frac{2\mathcal{G}(M+m)}{r_0}.$$

Cette valeur est appelée *vitesse de libération*. Par exemple, à la surface de la Terre, l'accélération de la pesanteur est

$$g = \frac{\mathcal{G}M}{R_0^2}$$

où R_0 est le rayon terrestre et M la masse de la Terre. Supposons qu'on lance un projectile depuis un tel point de la surface terrestre, si on le lance verticalement, comme nous l'avons déjà dit, son mouvement sera rectiligne et il retombera tôt ou tard au même endroit ! Si on le lance selon une autre direction, sa vitesse de libération sera donnée par

$$v_{lib} = \sqrt{2gR_0}$$

en négligeant la masse de l'objet par rapport à celui de la Terre. On a environ $R_0 = 6400km$ et $g = 9.8km/s^2$ d'où $v_{lib} = 11,2km/s$.

Bibliographie

[Fe] R.P. Feynman, Mécanique 1, *InterEditions*.
[Gi] H. Gié, Dynamique, *Editions J.B. Baillière*.
[Gr] A. Gramain, Géométrie élémentaire, *Hermann*.
[Ig] P. Iglesias, Symétries et moment, *Hermann*.
[Ko] A. Koestler, Les Somnanbules, *Calmann-Lévy*.
[Ne] I. Newton, Principes mathématiques de la philosophie naturelle, *Librairie Albert Blanchard*.
[Sa] P. Sauser et al, Mathématiques cours et exercices, terminales C et E, *Ellipses*.
[Va] P. Valéry, Cahiers II, *Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard*.