

## MATHÉMATIQUES ET TRAVAUX PUBLICS

### deux exemples

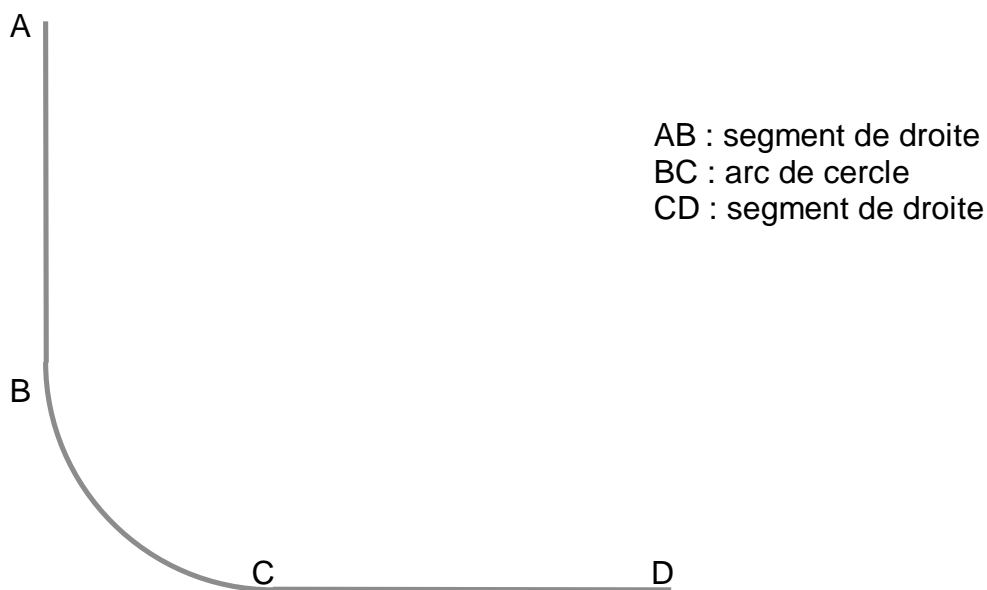
Les Travaux Publics ont toujours profité de l'apport des Mathématiques. Bien sûr, les connaissances mathématiques ne constituent qu'une partie du savoir des ingénieurs qui réalisent, selon les moyens de leur temps, des prouesses techniques. En outre, seuls quelques résultats mathématiques parmi des milliers peuvent être appliqués au Bâtiment ou au Génie Civil.

Nous allons décrire deux exemples d'application de résultats mathématiques, l'un aux tracés ferroviaires et routiers, l'autre à l'architecture. Ces deux exemples ont en commun la relative simplicité des outils mathématiques utilisés et la qualité remarquable du résultat fourni aux techniciens. Bien que les notions utiles, qui appartiennent au domaine de la géométrie différentielle, soient enseignées après le bac, cet exposé les présentera d'une façon élémentaire (niveau classe de Première).

Les deux exemples étudiés illustrent des situations sensiblement différentes : lorsque le problème du tracé des voies ferrées s'est posé, les mathématiciens étaient bien capables de démontrer l'existence d'une courbe répondant aux conditions requises, mais ils ne pouvaient pas en obtenir un tracé exact, et ce sont des méthodes élémentaires qui ont fourni, jusque vers 1960, un tracé approché suffisamment précis pour les utilisateurs ; en revanche, la surface proposée par les mathématiciens pour répondre aux besoins des architectes était d'emblée parfaite, mais la simplicité de sa mise en œuvre permet de penser que quelques bâtisseurs ignorants ont pu la construire "d'instinct", appliquant ainsi de beaux résultats mathématiques sans le savoir.

## I- Premier exemple : la clotoïde

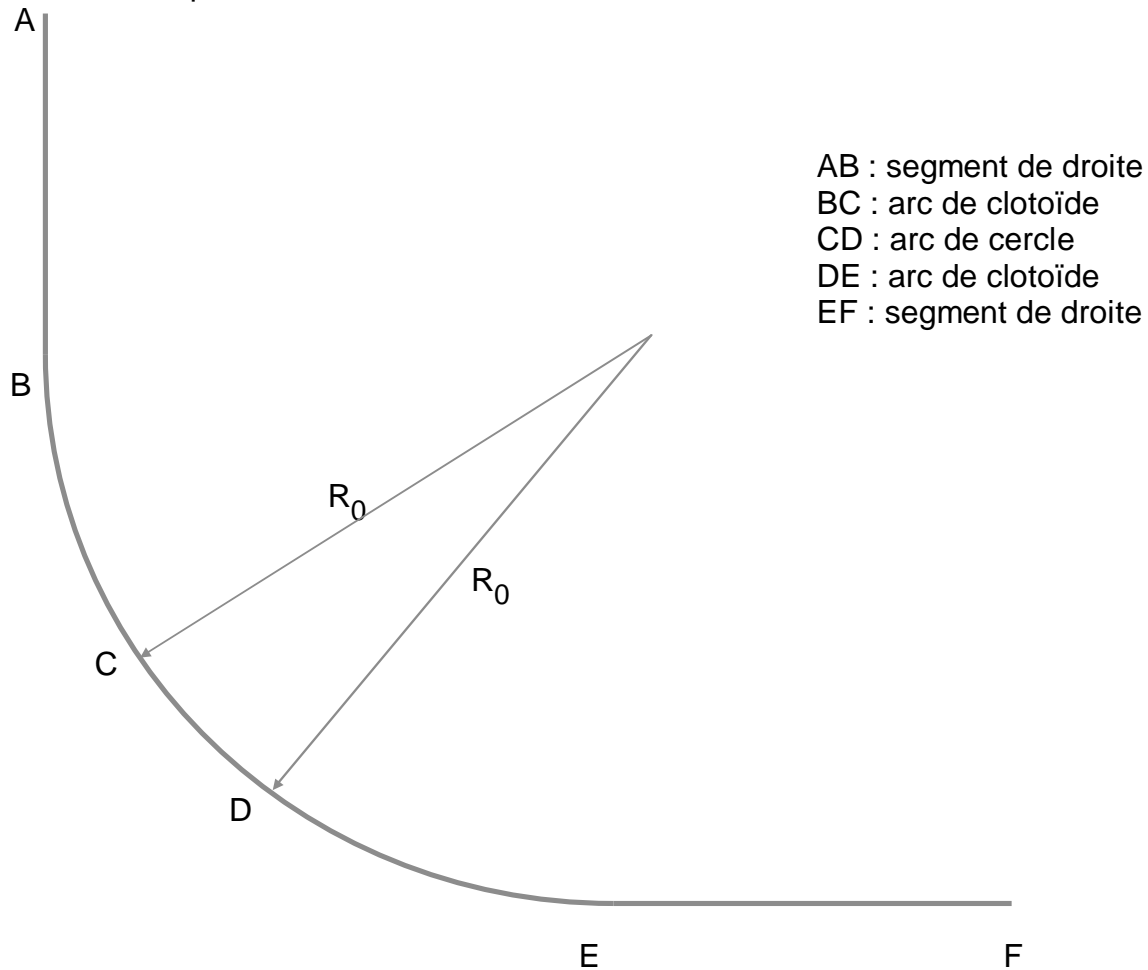
1/ Le problème posé : Lors de la construction des premières voies ferrées (Manchester-Liverpool en 1830 et, de 1830 à 1835, première ligne française de Lyon à Saint-Étienne), les techniciens ont rencontré un problème pour le tracé des courbes. Pour raccorder deux segments de droite de directions différentes, la solution la plus évidente consiste à utiliser un arc de cercle :



Avec un tel tracé, on observe qu'un train arrivant au point B est soumis brutalement à une force latérale (force centrifuge) pouvant entraîner le déraillement et le même phénomène se produit "à l'envers" au point C. En réduisant la vitesse des convois et en augmentant le rayon de l'arc de cercle, on peut éviter le déraillement mais on constate alors dans le temps une usure très importante des rails aux points B et C. Ce tracé n'est donc pas satisfaisant.

Les ingénieurs ont donc souhaité disposer d'une courbe "progressive" permettant de raccorder les segments de droite aux arcs de cercle. La caractéristique de cette courbe est que son rayon de courbure varie proportionnellement (ou inversement proportionnellement) à sa longueur. Une telle courbe a été baptisée clotoïde ou spirale de Cornu (1864) ou radioïde aux arcs et elle a peut-être été découverte par Bernouilli vers 1780.

On peut alors réaliser le tracé suivant :



Dans ce cas, le rayon de courbure est infini sur le segment AB, puis il varie, de façon inversement proportionnelle à la distance parcourue, d'une valeur très grande à  $R_0$  (rayon de l'arc de cercle) sur l'arc de cloïde BC. Il reste égal à  $R_0$  sur l'arc CD, puis il varie, proportionnellement à la distance parcourue, de  $R_0$  à une valeur très grande entre D et E, et reste enfin infini de E à F.

Avant d'étudier plus précisément cette courbe, notons que son utilisation est encore plus indispensable pour concevoir les voies des T.G.V., ainsi que les tracés autoroutiers. Par ailleurs, une autre application importante de la cloïde intervient lors de l'utilisation de robots télécommandés, par exemple en milieu hostile (centrale nucléaire ou exploration spatiale). Il s'agit alors de connaître exactement la trajectoire du robot sachant que, lors des changements

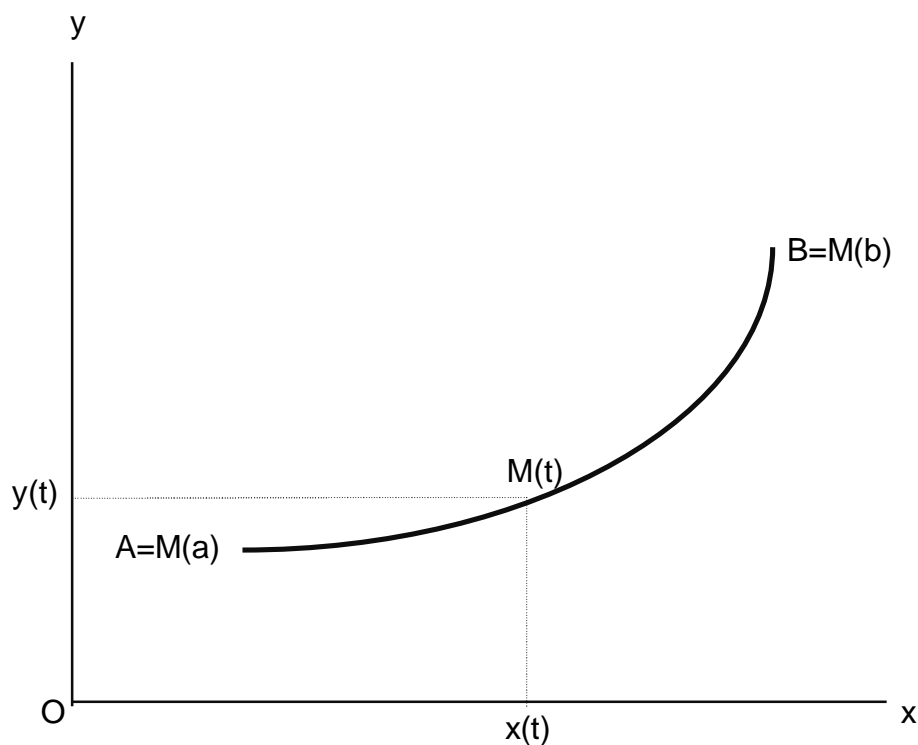
de direction, il continue à avancer ; la courbe qu'il décrit est donc du type "plus j'avance, plus (ou moins) je tourne" : c'est une clotoïde.

2/ Les outils mathématiques : Pour espérer déterminer une clotoïde, il faut savoir calculer deux nombres importants pour une courbe :

- d'une part sa longueur entre un point A et un point B connus
- d'autre part son rayon de courbure en un point quelconque M

Il suffira ensuite d'exprimer la proportionnalité (directe ou inverse) entre le rayon de courbure au point M et la longueur de l'arc AM.

Nous allons supposer que la courbe est définie paramétriquement, c'est-à-dire que l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  d'un point M de la courbe sont données en fonction d'un paramètre  $t$  par  $x = f(t)$  et  $y = g(t)$ , où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables autant de fois que nécessaire sur un intervalle  $[a,b]$ .



Chaque valeur de  $t$  dans l'intervalle  $[a,b]$  détermine une abscisse  $x(t)$  et une ordonnée  $y(t)$  et donc un point  $M(t)$ . Il est possible et particulièrement intéressant de donner une interprétation cinématique de cette situation en considérant que la variable  $t$  est le temps et donc que le point  $M(t)$ , dont les coordonnées varient en fonction du temps, est en

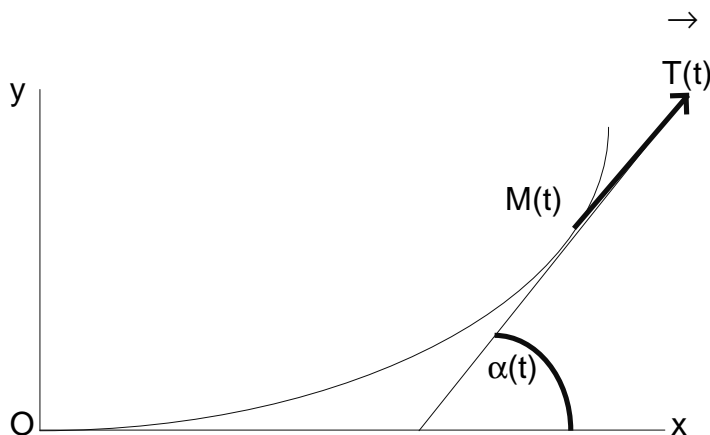
mouvement dans le repère choisi. C'est en fait ce qui se produit lorsqu'un véhicule parcourt le tracé.

Pour le calcul de la longueur d'un arc de courbe, l'interprétation cinématique est particulièrement féconde si on fait l'hypothèse d'une vitesse constante (mouvement uniforme). Dans ce cas, la longueur  $s(t)$  de l'arc de courbe parcouru entre les instants 0 et  $t$  est en effet proportionnelle à  $t$ . Si la vitesse constante est égale à 1, ce qui n'est qu'une question d'unité de distance ou de temps et n'a pas d'influence sur la courbe, on a tout simplement  $s(t) = t$ .

Or la vitesse  $v(t)$  du mobile à l'instant  $t$  dépend des variations de l'abscisse  $x(t)$  et de l'ordonnée  $y(t)$  en fonction du temps, et plus précisément des dérivées  $x'(t)$  et  $y'(t)$  selon la formule  $v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ . Avec l'hypothèse d'un mouvement uniforme, on obtient donc le premier résultat suivant :

$$(1) : s(t) = t \text{ avec la condition } x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$$

Pour le calcul de la courbure  $\gamma(t)$  au point  $M(t)$ , on utilise l'angle  $\alpha(t)$  entre une direction fixe (l'axe des abscisses) et la direction du mobile à l'instant  $t$ , qui est donnée par la tangente à la courbe au point  $M(t)$ .



En effet, si l'angle  $\alpha(t)$  ne varie pas en fonction du temps, le point se déplace sur une droite et la courbure est nulle. Au contraire, si  $\alpha(t)$  varie rapidement en fonction de  $t$ , le mobile prend un virage "serré" et la courbure est élevée.

On définit donc la courbure de la courbe au point  $M(t)$  comme la variation instantanée (c'est-à-dire la dérivée) de l'angle  $\alpha(t)$  par rapport au temps :

$$(2) : \gamma(t) = \alpha'(t)$$

L'inverse de la courbure  $\gamma(t)$  sera appelé rayon de courbure de la courbe au point  $M(t)$  et noté  $\rho(t)$ .

La condition que doit vérifier la clotoïde (courbure proportionnelle à la longueur de l'arc de courbe) s'écrit très simplement, surtout si l'on choisit un coefficient de proportionnalité égal à 1 :

$$(3) : \gamma(t) = t$$

On en déduit, grâce à (2),  $\alpha'(t) = t$  donc  $\alpha(t)$  est une fonction de  $t$  dont la dérivée vaut  $t$ , et on obtient alors, en supposant qu'à l'instant 0 le mobile commence son mouvement dans la direction de l'axe  $Ox$  ( $\alpha(0) = 0$ ) :

$$(4) : \alpha(t) = \frac{t^2}{2}$$

Or les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{T}(t)$  de la tangente en  $M(t)$  à la courbe sont  $x'(t)$  et  $y'(t)$  et ce vecteur est unitaire car  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ . Les coordonnées du vecteur  $\vec{T}(t)$  sont donc aussi égales à  $\cos \alpha(t)$  et  $\sin \alpha(t)$ . On a donc  $x'(t) = \cos \alpha(t)$  et  $y'(t) = \sin \alpha(t)$ . On touche alors au but et on peut écrire :

$$(5) : x'(t) = \cos \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \sin \frac{t^2}{2}$$

Le problème semble résolu :  $x(t)$  et  $y(t)$  sont donc deux fonctions de  $t$  dont les dérivées valent  $\cos \frac{t^2}{2}$  et  $\sin \frac{t^2}{2}$ .

Malheureusement, on ne sait pas exprimer ces fonctions au moyen des fonctions usuelles (trigonométriques, logarithme ou autres) et on doit se contenter d'écrire :

$$(6) : x(t) = \int_0^t \cos \left( \frac{u^2}{2} \right) du \quad \text{et} \quad y(t) = \int_0^t \sin \left( \frac{u^2}{2} \right) du$$

où les petits serpents, nommés intégrales, désignent l'opération inverse de la dérivation. Le calcul "à la main" de telles intégrales est long et approximatif et, pour avoir un tracé relativement précis de la clotoïde (c'est-à-dire suffisamment de points de coordonnées connues), il faut effectuer ces calculs pour de nombreuses valeurs de  $t$ . Voilà pourquoi cette belle théorie mathématique n'a pas permis aux ingénieurs de réaliser leurs tracés ferroviaires ou routiers jusqu'à l'apparition, il n'y a guère plus de trente ans, des premiers ordinateurs.

La première figure représente une clotoïde définie par les relations (6) pour  $t$  variant de 0 à 1,5. Il s'agit de l'arc "utile" de la courbe pour raccorder un segment de droite à un arc de cercle dont le rayon est égal au rayon de courbure de la clotoïde à son extrémité. Il suffit de choisir un autre intervalle de variation pour  $t$  pour disposer d'un rayon de courbure différent à l'extrémité et on peut même raccorder entre eux deux arcs de cercle de rayons distincts en prenant un "morceau" de clotoïde ayant des rayons de courbures convenables à chacune de ses extrémités.

Les tracés ferroviaires et autoroutiers actuels sont ainsi constitués d'une succession de segments de droites, d'arcs de clotoïdes et d'arcs de cercles.

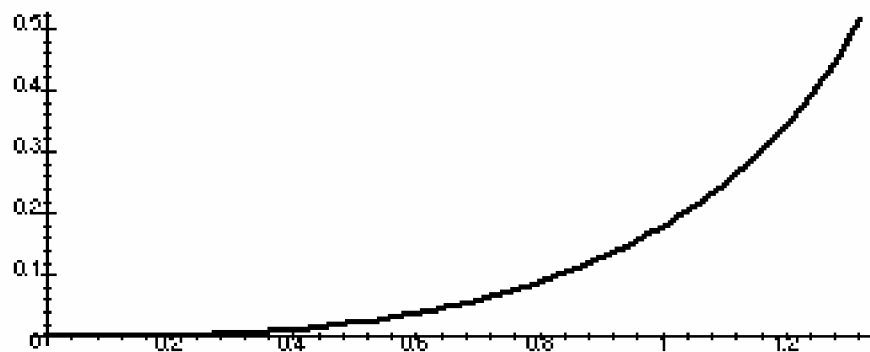


figure 1

La deuxième figure représente la même clotoïde pour  $t$  variant de -1 à 8. Elle met en évidence la symétrie de la courbe par rapport au point O ainsi que l'existence de deux "points asymptotes" autour desquels la courbe s'enroule.

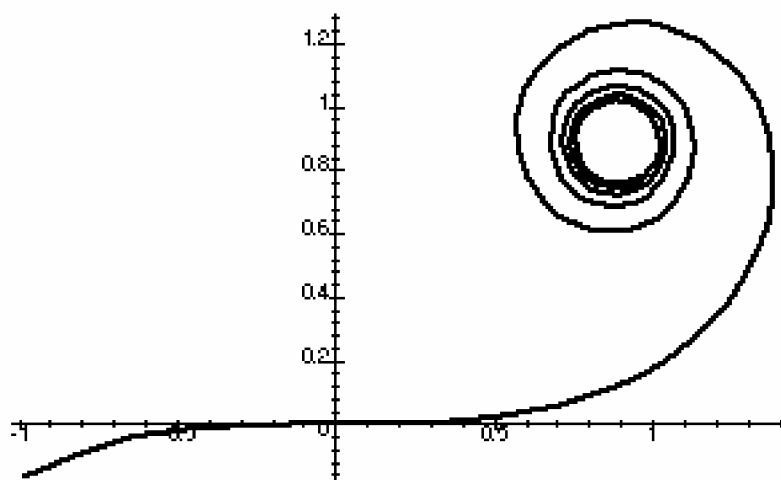
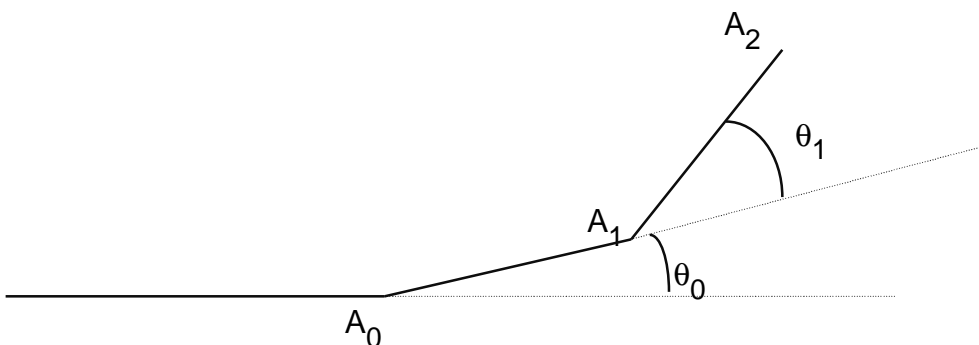


figure 2

3/ Comment faire sans ordinateur ? Au milieu du XIXe siècle, les ingénieurs chargés du tracé des premières voies ferrées ne disposaient pas de ces jolies courbes. Ils ont donc utilisé des méthodes approchées tout à fait élémentaires pour obtenir une succession de points qui, reliés les uns aux autres, fournissaient une bonne approximation de la clotoïde.

Dans la pratique, un tracé ferroviaire ou routier est déterminé avec précision sur le terrain en plaçant à distance régulière, en général tout les 10 mètres, un piquet qui matérialise l'axe de la future voie. Pour placer ces piquets, on utilise la démarche suivante :

A partir d'une portion droite du tracé, on construit un segment  $A_0A_1$  de longueur  $l$  (appelée "pas") qui fait un angle  $\theta_0$  avec la direction initiale. A partir du point  $A_1$ , on construit un deuxième segment  $A_1A_2$  de même longueur  $l$  qui fait un angle  $\theta_1$  avec le premier segment, et ainsi de suite :



On cherche à déterminer les angles successifs  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  de telle façon que la ligne brisée ainsi obtenue soit une approximation de la clotoïde :

- après avoir parcouru la longueur  $l$  du premier segment, le mobile a tourné d'un angle  $\theta_0$ . La courbure au point  $A_1$ , définie comme la variation de l'angle divisée par la variation

de la distance, est donc  $\gamma_0 = \frac{\theta_0}{l}$ .

- entre les points  $A_1$  et  $A_2$ , le mobile parcourt à nouveau la distance  $l$  et tourne cette

fois d'un angle  $\theta_1$ , la courbure au point  $A_2$  est donc  $\gamma_1 = \frac{\theta_1}{l}$ .

- et ainsi de suite : entre les points  $A_{n-1}$  et  $A_n$ , le mobile parcourt la distance  $l$  et

tourne d'un angle  $\theta_{n-1}$ , donc la courbure au point  $A_n$  est  $\gamma_{n-1} = \frac{\theta_{n-1}}{l}$ .

Or, pour avoir une approximation de la clotoïde, on veut que la courbure en un point

soit proportionnelle à la distance parcourue jusqu'à ce point, ce qui donne :  $\frac{\gamma_0}{l} = \frac{\gamma_1}{2l} = \dots =$

$\frac{\gamma_{n-1}}{nl}$ , c'est-à-dire :  $\frac{\theta_0}{l} = \frac{\theta_1}{2l} = \dots = \frac{\theta_{n-1}}{nl}$ , et par conséquent :

$$\theta_{n-1} = n\theta_0 \text{ pour tout entier } n \geq 1$$

Au point  $A_n$ , on a donc les données suivantes :

- la distance totale parcourue est  $L = nl$

- la courbure est  $\gamma_{n-1} = \frac{\theta_{n-1}}{l} = \frac{n\theta_0}{l} = n\gamma_0$

Le rapport  $\frac{\text{courbure}}{\text{dis tan ce}} = \frac{\gamma_0}{l}$  est donc bien constant, et la proportionnalité recherchée est obtenue.

De plus, le mobile a tourné entre  $A_0$  et  $A_n$  d'un angle total égal à :

$$\alpha = \theta_0 + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1} = \theta_0 (1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2} \theta_0 .$$

Dans la pratique, les données sont la longueur totale L du virage ainsi que le "pas" l de la ligne brisée (ce qui détermine n), et l'angle total  $\alpha$  du virage, ce qui permet la détermination de  $\theta_0$  et de tous les angles successifs.

Exemple : on veut réaliser un virage d'angle  $\alpha = 31,5^\circ = 0,55$  radian sur une longueur de 100 mètres avec un pas de 10 mètres.

$$\text{Donc } n = 10 \text{ et } \theta_0 = \frac{2\alpha}{n(n+1)} = 0,01 \text{ radian.}$$

Les valeurs successives de la distance parcourue, de l'angle (en radian) d'un segment par rapport au précédent, de la courbure et du rayon de courbure sont données par le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
distance totale	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
angle $\theta_{n-1}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
angle total	0,01	0,03	0,06	0,1	0,15	0,21	0,28	0,36	0,45	0,55
courbure	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$
rayon	1000	500	333	250	200	166	143	125	111	100

(distances et rayons de courbure en mètres et angles en radians).

Jusqu'aux années 80, les tracés routiers et ferroviaires ont été réalisés à l'aide de tableaux tels que celui-ci qui permettaient aux géomètres-topographes de positionner les

piquets grâce à des mesures d'angles et de distances. Il est maintenant possible d'obtenir avec précision les coordonnées d'un grand nombre de points de la courbe idéale, mais le piquetage se fait toujours en mesurant des angles et des distances.

## **II- Deuxième exemple : le parabolöide hyperbolique**

1/ Le problème posé : Pour réaliser le toit en béton armé d'un bâtiment, une équipe d'architectes et d'ingénieurs doit proposer une solution qui respecte certaines contraintes :

- les dimensions du bâtiment sont importantes et son utilisation (terrain de sport, salle de concert) rend impossible le recours à des piliers.
- la solution proposée doit être facile à réaliser techniquement et son coût doit rester raisonnable.
- la forme du toit doit permettre un bon écoulement des eaux de pluie et faciliter leur évacuation.
- le toit doit pouvoir résister à une couche de neige relativement épaisse.
- la hauteur totale du bâtiment est limitée.
- la solution proposée doit être esthétique.

Comment satisfaire ces exigences qui semblent contradictoires ?

Dans la pratique, ce sont souvent les critères de coût, et donc aussi de facilité de mise en œuvre, qui sont prioritaires. Nous commencerons donc par analyser les surfaces possibles de ce point de vue.

Les surfaces les plus faciles à réaliser en béton armé sont celles qui contiennent des droites. En effet, le ferrailage du béton peut être placé le long de ces droites et le coffrage peut utiliser des éléments rectilignes juxtaposés. Les mathématiciens appellent ces surfaces des surfaces réglées et les droites qu'elles contiennent sont nommées génératrices.

Outre le plan, il existe beaucoup de surfaces réglées plus ou moins compliquées. Les plus courantes sont le cylindre et le cône de révolution, mais on peut remarquer qu'une plaque de tôle ondulée ou le plafond d'un escalier en colimaçon sont également des surfaces réglées.

Toutefois, pour ces quatre dernières surfaces, les lignes tracées sur la surface perpendiculairement aux génératrices ne sont pas des droites et il n'est donc pas possible de réaliser un ferrailage rectiligne dans deux directions perpendiculaires. La simplicité de construction liée aux surfaces réglées n'est donc que partiellement exploitable pour ces surfaces.

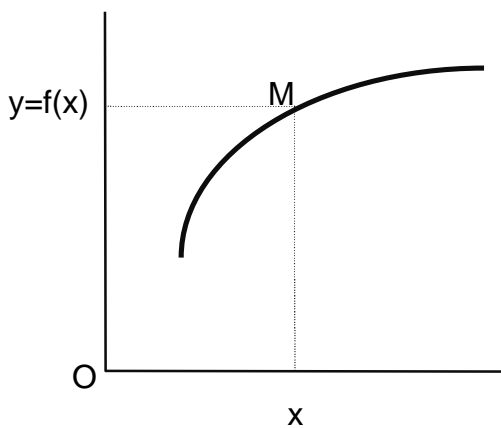
On peut observer également qu'une plaque de tôle plane se plie facilement dans toutes les directions, alors qu'une plaque ondulée de même épaisseur a une résistance au pliage beaucoup plus importante dans la direction perpendiculaire aux ondulations. La forme des "coupes" d'une surface a une grande influence sur ses caractéristiques de résistance et ce résultat est à l'origine de l'utilisation, fort ancienne, de la voûte.

De nombreuses surfaces ne sont pas des surfaces réglées, par exemple la sphère, l'ellipsoïde de révolution (le ballon de rugby) ou le parabololoïde de révolution (les "paraboles" pour la télévision par satellite) et leur réalisation en béton armé est délicate et assez coûteuse.

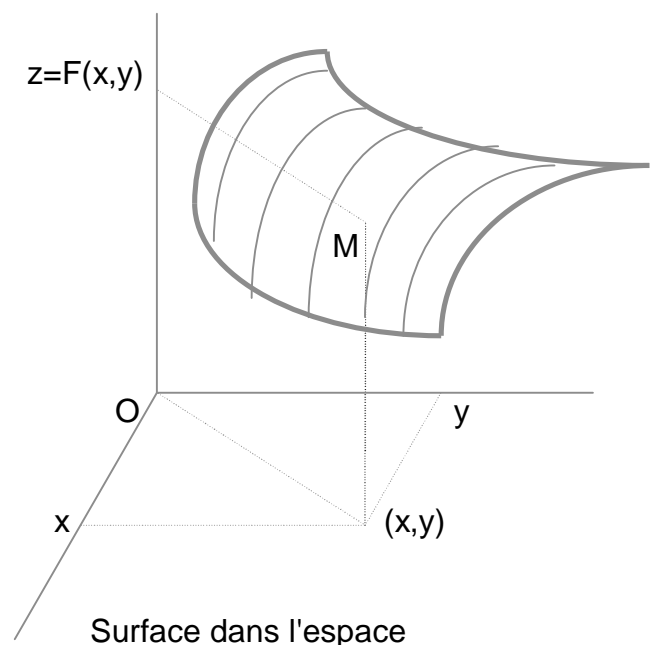
2/ Les outils mathématiques : la définition mathématique et l'étude d'une surface sont assez semblables à celles d'une courbe mais il faut se placer dans l'espace de dimension trois et non plus dans le plan.

En effet, alors qu'un point de la courbe plane représentative d'une fonction  $f$  d'une variable est défini dans un repère par son abscisse  $x$  et son ordonnée  $y = f(x)$ , une surface de l'espace de dimension trois va représenter une fonction de deux variables  $F$  :

à tout point du plan, de coordonnées  $x$  et  $y$ , on associe le point de l'espace dont les coordonnées sont  $x$ ,  $y$  et  $z = F(x,y)$ , et l'ensemble de ces points constitue la surface représentative de la fonction de deux variables  $F$ .



Courbe dans le plan



Surface dans l'espace

Bien entendu, l'étude d'une surface est plus compliquée que celle d'une courbe : la notion de dérivée, dont le signe permet de savoir si la courbe "monte" ou "descend", est remplacée par celle de dérivée partielle, qui se calcule en fixant l'une des deux variables, mais une surface peut "monter" dans une direction et "descendre" dans une autre.

De plus, le même point de la surface peut correspondre à un maximum lorsqu'on parcourt la surface dans une direction et à un minimum lorsqu'on la parcourt dans la direction perpendiculaire !

Un bon moyen d'avoir une idée assez précise d'une surface consiste à en étudier des "coupes", c'est-à-dire ses intersections avec des plans bien choisis, en général parallèles aux plans  $xOz$  et  $yOz$ .

Une telle intersection est une courbe plane obtenue en fixant une variable, par exemple  $y = b$ , et elle représente la fonction d'une variable définie par  $z = F(x,b)$ . Dans la pratique, ces "coupes" peuvent correspondre à l'emplacement du ferrailage ou à la position d'éléments de coffrage.

Les notions de plan tangent et de droite normale en un point à une surface sont également intéressantes, ainsi que l'intersection de la surface avec d'autres surfaces, notamment des sphères, mais nous n'avons pas besoin ici de ces études relativement "pointues".

Des surfaces très simples correspondent en général à des fonctions de deux variables également très simples, par exemple :

- un plan correspond à une fonction du type  $z = ax + by$ ,

- une demi-sphère correspond à une fonction du type  $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$  .

- un demi-cône correspond à une fonction du type  $z = k \sqrt{x^2 + y^2}$  .

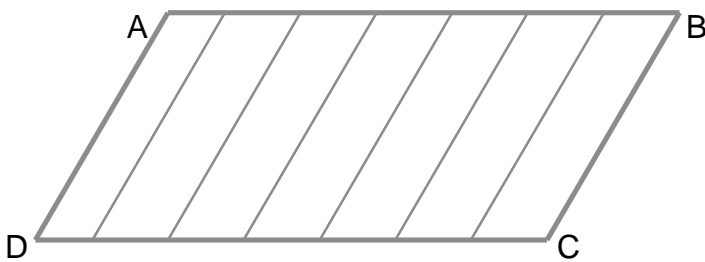
Cherchons donc une fonction de deux variables  $z = F(x,y)$ , aussi simple que possible, et qui sera représentée dans l'espace par une surface réglée ayant toutes les propriétés recherchées.

Le plan ne peut pas être envisagé à cause des dimensions du bâtiment : son centre aurait tendance à s'affaisser sous l'effet de son propre poids, même en l'absence de neige.

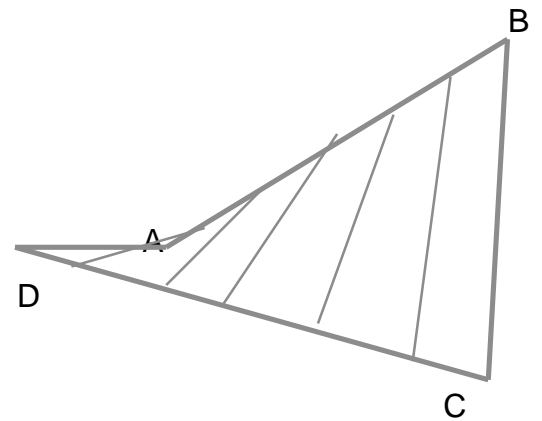
La largeur du bâtiment étant grande, un toit en forme de demi-cylindre ou de cône exigerait une hauteur très importante, ce qui est exclu. Une surface ayant la forme d'une plaque de tôle ondulée offre une résistance très faible au pliage le long d'une ondulation et

nécessiterait donc des poutres de soutien perpendiculaires aux ondulations, or des poutres de grande portée sont difficiles et chères à réaliser.

L'idée intuitive qui conduit à la surface "idéale" consiste simplement à partir d'une portion de plan matérialisée par deux familles de génératrices perpendiculaires, puis à "gauchir" la surface en relevant deux de ses coins tandis qu'on abaisse les deux autres :



surface plane



surface "gauche"

Il est extrêmement facile de réaliser une maquette d'une telle surface, en matérialisant les génératrices à l'aide de ficelles tendues.

La surface ainsi obtenue correspond à une fonction de deux variables très simple du type  $F(x,y) = k xy$ , et on peut l'étudier dans le cas particulier où la constante  $k$  est égale à 1, ce qui donne comme équation de la surface :

$$z = xy$$

Une telle surface est appelée parabolôïde hyperbolique et l'étude de ses propriétés va justifier ce nom et montrer que les qualités recherchées par les techniciens sont bien obtenues :

- il s'agit bien d'une surface réglée : en effet, les intersections de cette surface avec des plans parallèles aux plans  $yOz$  ou  $xOz$  (dont les équations sont de la forme  $x = a$  ou  $y = b$ ) sont des courbes planes qui ont pour équation  $z = by$  ou  $z = ax$ . Il s'agit donc bien de droites, et ces droites sont situées dans des plans perpendiculaires. On peut de plus remarquer que leur coefficient directeur est  $b$  (ou  $a$ ), ce qui signifie que, plus on s'éloigne des plans  $yOz$  ou  $xOz$ , plus les valeurs absolues de  $b$  (ou  $a$ ) sont grandes, et donc plus les droites contenues dans la surface sont inclinées. Ceci correspond bien à l'idée intuitive de départ consistant à "gauchir" le quadrilatère délimitant une portion de plan.

Lors de la réalisation d'une telle surface, le ferrailage du béton sera placé le long des génératrices de la surface, selon deux réseaux de droites non coplanaires, chaque droite de l'un des réseaux rencontrant toutes les droites de l'autre. Des éléments de coffrage rectilignes pourront être utilisés, soit de façon statique (si les dimensions ne sont pas trop grandes), soit sous forme de coffrages "glissants" avec des vérins pour modifier l'inclinaison des droites selon l'avancement du coulage de la dalle.

- la résistance d'une telle surface est grande : considérons maintenant les intersections de notre surface avec les plans bissecteurs, dont les équations sont  $y = x$  et  $y = -x$ . On obtient les courbes planes d'équations  $z = x^2$  et  $z = -x^2$ , c'est-à-dire deux paraboles, l'une tournée vers le haut et l'autre vers le bas.

Les intersections avec des plans parallèles aux plans bissecteurs sont également des paraboles. Ceci justifie une partie du nom de notre surface, mais surtout, la parabole tournée vers le bas assure un "effet de voûte" qui confère à la surface une résistance très supérieure à celle d'un plan, et même d'une plaque ondulée, grâce à la parabole tournée vers le haut.

Le qualificatif "hyperbolique" attribué à cette surface vient quant à lui des intersections avec des plans horizontaux d'équations  $z = h$  ; ce sont des courbes planes d'équation  $xy = h$ , c'est-à-dire des hyperboles équilatères.

- l'écoulement des eaux de pluie est assuré : les seules droites horizontales contenues dans la surface sont les axes du repère et le seul point où le plan tangent est horizontal est l'origine O.

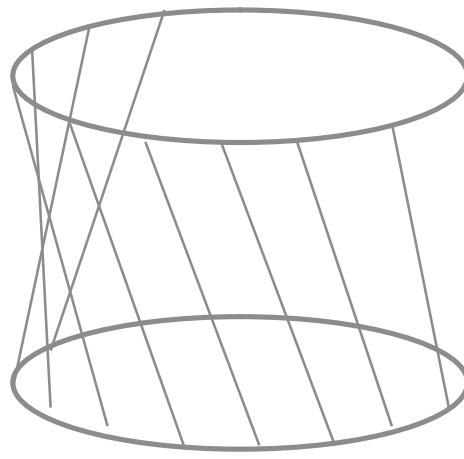
On peut d'ailleurs remarquer que ce point correspond à ce qu'on appelle un "col" puisqu'en ce point, la parabole d'équation  $z = -x^2$  passe par un maximum alors que la parabole d'équation  $z = x^2$  passe par un minimum.

Aucun point de la surface ne va donc accumuler les eaux de pluie et leur évacuation sera facile en installant des canalisations aux point bas du quadrilatère gauche délimitant la surface.

- la hauteur totale du bâtiment est maîtrisée : il suffit d'ajuster le coefficient k (de l'équation  $z = kxy$ ) pour limiter la hauteur de la surface par rapport au niveau de l'origine O, ou des points bas A et C.

- l'aspect esthétique est généralement apprécié : c'est évidemment une affaire subjective, mais ce genre de bâtiment est plutôt jugé favorablement. Pour avoir une idée "in situ" de l'intégration d'une telle surface dans un paysage urbain, vous pouvez vous rendre devant la Chambre des Métiers, avenue du Maréchal Juin à Nîmes, où un abribus possède un toit en toile formant un parabolöide hyperbolique. Un certain nombre de bâtiments (gymnases, salles de concert, théâtres, ...) ont été réalisés dans différentes villes du monde en utilisant le parabolöide hyperbolique.

Pour conclure sur les surfaces réglées, on peut signaler qu'un autre type de ces surfaces est couramment utilisé, en particulier pour la construction des tours de réfrigération des centrales nucléaires. Il s'agit de l'hyperboloïde de révolution qui a la forme d'un cylindre évasé à ses extrémités :



Dans ce cas, on bénéficie encore simultanément d'une construction facile et économique, de bonnes conditions de "tirage" de la tour, et d'une esthétique acceptable.

Ci-dessous, photo d'un parabolöide hyperbolique, réalisé au moyen d'une toile tendue entre les 4 côtés d'un quadrilatère gauche, constituant le toit d'un abribus situé sur le boulevard Maréchal Juin à Nîmes.

